



Modelos h-Adaptivos de Elementos Finitos

*Dr. Ing. Hugo Scaletti Farina
Universidad Nacional de Ingeniería*



introducción

- Las técnicas de elementos finitos fueron inicialmente desarrolladas para el análisis estructural
- Actualmente se emplean en prácticamente todas las áreas de la ciencia y la ingeniería
- Se reconocen como herramientas poderosas para la solución de ecuaciones diferenciales en general
- Son particularmente útiles al tratar medios con geometría irregular y no homogeneidad

Ecuaciones Diferenciales para
un Problema Estacionario



Aproximaciones de Elementos Finitos



Sistema de Ecuaciones Algebraicas

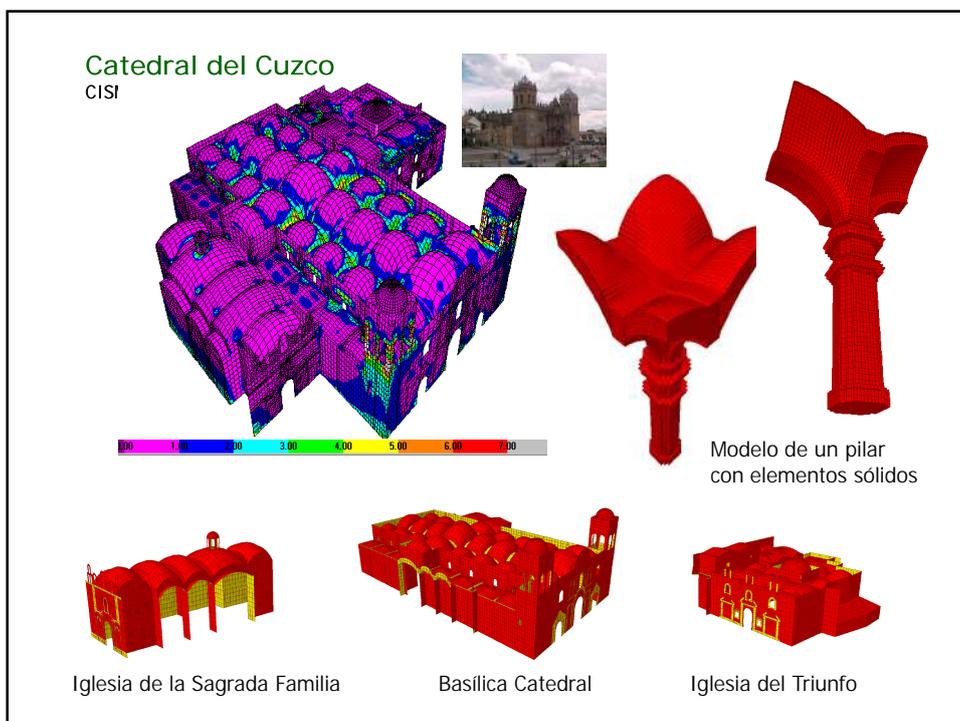
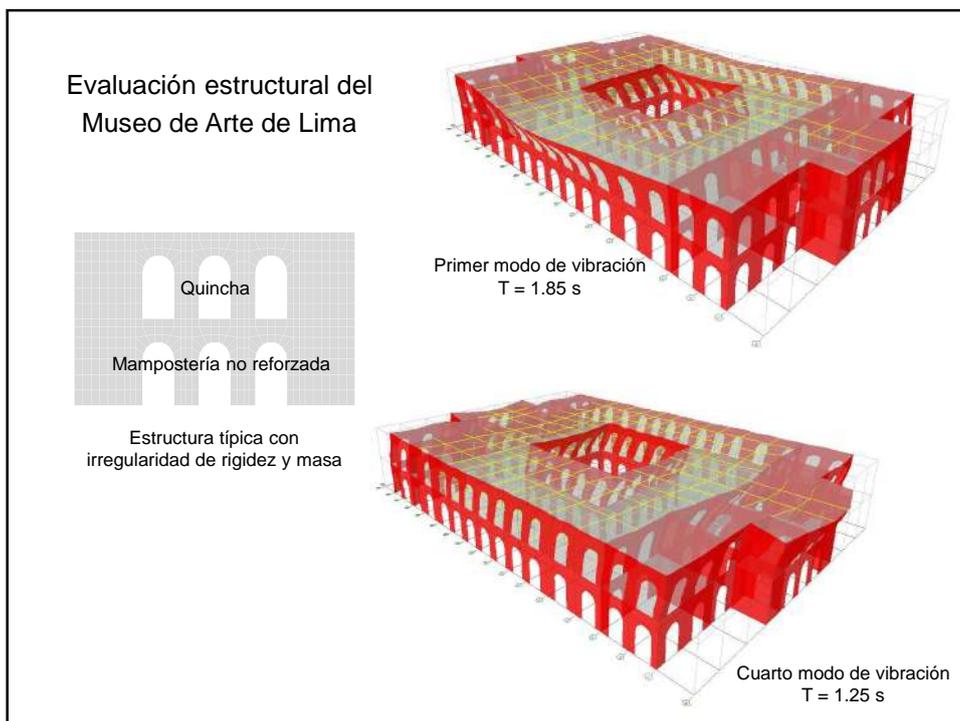
Ecuaciones Diferenciales para
un Problema Dinámico

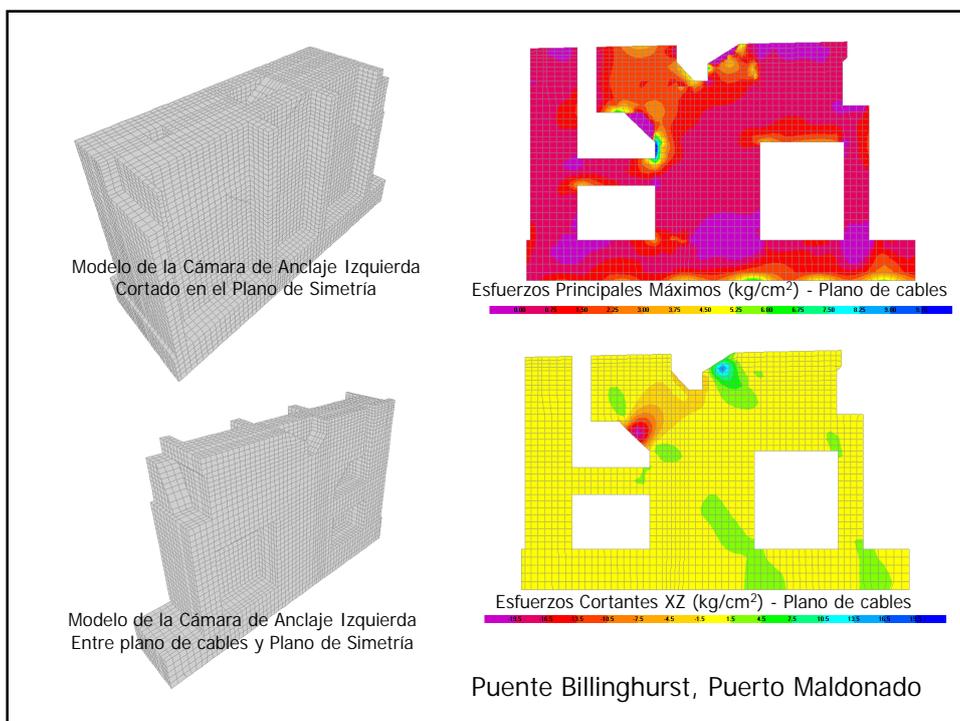
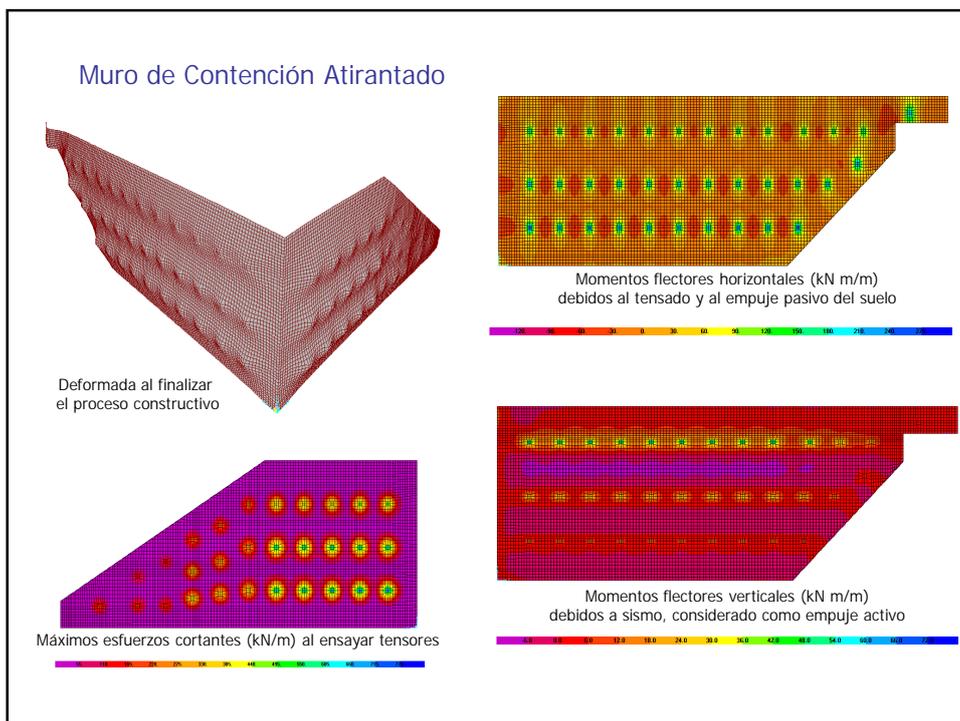


Aproximaciones de Elementos Finitos



Sistema de Ecuaciones
Diferenciales Ordinarias







antecedentes

- Las ideas básicas del método de elementos finitos se encuentran en diversos trabajos precursores
- Estrictamente son una extensión de los métodos de parámetros indeterminados, propuestos por Gauss en el siglo XVIII y más desarrollados a inicios del siglo XX
- Los procedimientos de parámetros indeterminados en su forma "clásica", basados en aproximaciones válidas para todo el medio estudiado, están limitados a situaciones relativamente simples



Método de parámetros indeterminados: Viga simplemente apoyada con carga uniforme

Aproximación: $v(x) \approx \text{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \Delta$

función conocida \rightarrow $\left(\frac{\pi x}{L} \right)$ \leftarrow parámetro indeterminado

en este caso Δ puede interpretarse como la deflexión máxima

Con la aproximación y sus consecuencias, la energía potencial:

$$\pi_p(v) = \int_L \frac{1}{2} EI (v'')^2 dx - \int_L v w dx = \text{mínima}$$

se reduce a una simple función del parámetro indeterminado Δ

$$\pi_p(\Delta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^4 EI}{2L^3} \right) \Delta^2 - \left(\frac{2wL}{\pi} \right) \Delta$$

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \Delta} = \left(\frac{\pi^4 EI}{2 L^3} \right) \Delta - \left(\frac{2 wL}{\pi} \right) = 0$$

⇓

$$\Delta = \frac{4}{\pi^5} \frac{wL^4}{EI} = 0.013071 \frac{wL^4}{EI}$$

La solución exacta es: $\frac{5}{384} \frac{wL^4}{EI} = 0.013021 \frac{wL^4}{EI}$

La forma de $v(x)$ antes propuesta no es exacta, pero se parece mucho a la forma correcta, lo que explica los buenos resultados

Sin embargo, cuando se tiene una geometría irregular, más aún si el material no es homogéneo, se hace difícil plantear una aproximación análoga, válida para todo el medio estudiado

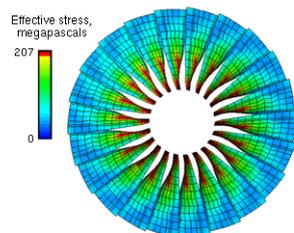


Figure 1. The distribution of stresses in the rotating blades of a jet engine operating in a steady state is shown as modeled by DYNAS3D.

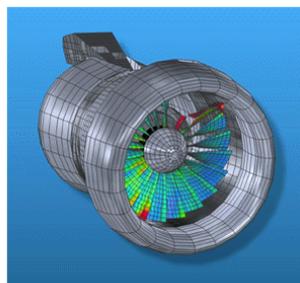


Figure 2. Simulation of a jet-engine blade breaking off. The engine is shown one-third of a revolution after the initial blade release.

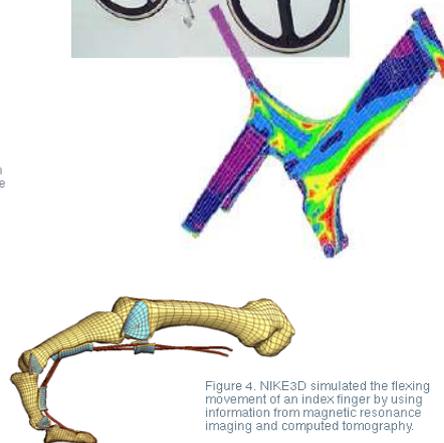


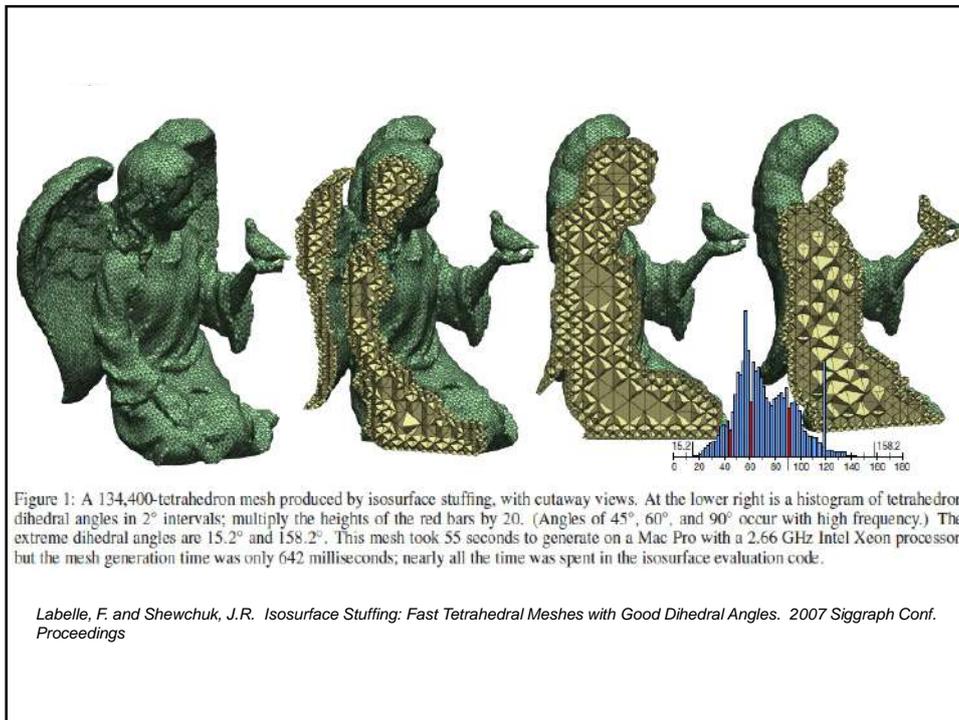
Figure 4. NIKE3D simulated the flexing movement of an index finger by using information from magnetic resonance imaging and computed tomography.



ideas básicas del método de EF

- En las técnicas de elementos finitos se resuelve el problema dividiendo el medio estudiado en numerosos "elementos", que se interconectan en un número finito de puntos o "nudos"
- Para cada elemento se hacen aproximaciones distintas, de carácter local: $u = \sum N_i(x, y) a_i$
- Habitualmente los parámetros a_i que definen la aproximación son los valores numéricos de la(s) función(es) incógnita en los nudos. En tal caso, las aproximaciones son propiamente interpolaciones

- La idea básica al emplear elementos finitos es que cualquier función, por complicada que sea, puede ser aproximada localmente por una función muy simple
- La calidad de los resultados en una región del modelo depende de que tan bien las aproximaciones puedan ajustarse a la solución correcta
- A medida que se reducen las dimensiones de los elementos (se refina la malla) las aproximaciones deben ser mejores. Si los elementos fueran infinitesimales la solución debería ser exacta



ecuación armónica

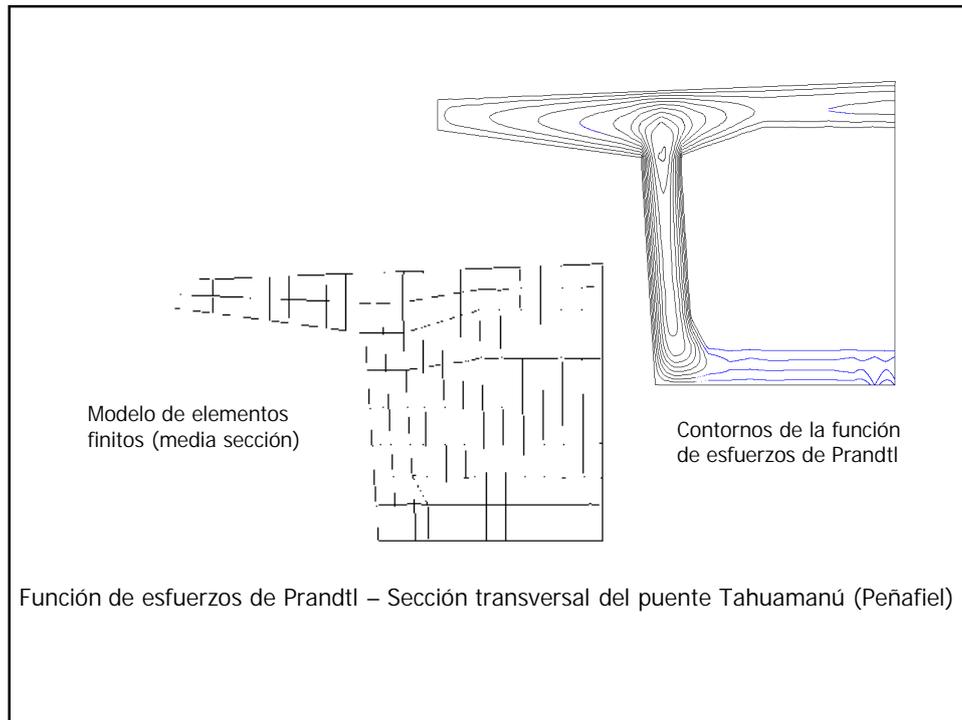
Ecuación diferencial: $\nabla^T \mathbf{K}(\nabla u) + \lambda u + p = 0$ en Ω

Condiciones de borde: $S = S_u + S_q$

C.B. esenciales $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ en S_u

C.B. naturales flujo $\mathbf{n}^T \mathbf{K}(\nabla u) = \bar{q}$ en S_q

convección $\mathbf{n}^T \mathbf{K}(\nabla u) = h(u - u_{ref})$



aproximación de elementos finitos

Para cada elemento:

Interpolación local:

$$u(x, y) \approx \mathbf{N}(x, y) \cdot \mathbf{a}$$

↑ función desconocida (altura piezométrica) ↑ funciones de interpolación ↑ parámetros indeterminados (valores nodales de u)

Gradiente:

$$\nabla u \approx \nabla \mathbf{N} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$$

Componentes de flujo
(ley de Darcy):

$$\mathbf{q} = \mathbf{K} \cdot \nabla u \approx \mathbf{K} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$$

↓ permeabilidades

La energía potencial π_p se reduce a una simple función de los parámetros indeterminados \mathbf{a} :

$$\pi_p(\mathbf{a}) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{B}\mathbf{a})^T \mathbf{K} (\mathbf{B}\mathbf{a}) - \frac{1}{2} (\mathbf{N}\mathbf{a})^T \lambda (\mathbf{N}\mathbf{a}) - (\mathbf{N}\mathbf{a})^T p \right) d\Omega - \int_{S_q} (\mathbf{N}\mathbf{a})^T \bar{q} dS = \min$$

$$\pi_p(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{H} \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{b}$$

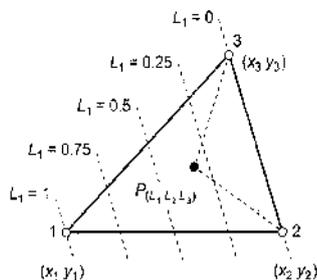
$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} - \mathbf{N}^T \lambda \mathbf{N}) d\Omega$$

$$\mathbf{b} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T p d\Omega + \int_{S_q} \mathbf{N}^T \bar{q} dS$$

Por lo tanto: $\frac{\partial \pi_p}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{H} \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$



funciones de interpolación (triángulos CST)



$$L_i = A_i / A$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

$$N_i = L_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y)$$

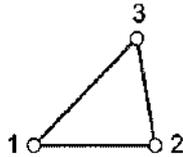
$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= y_j - y_m \\ c_i &= x_m - x_j \end{aligned} \quad A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_m \\ y_i & y_j & y_m \end{vmatrix}$$

i, j, m son permutaciones cíclicas de $1, 2, 3$

$$x = \sum_{i=1}^3 L_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^3 L_i y_i$$



solución con elementos finitos CST



$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3$$

$$u = (L_1 \quad L_2 \quad L_3) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{a}$$

$$L_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y)$$

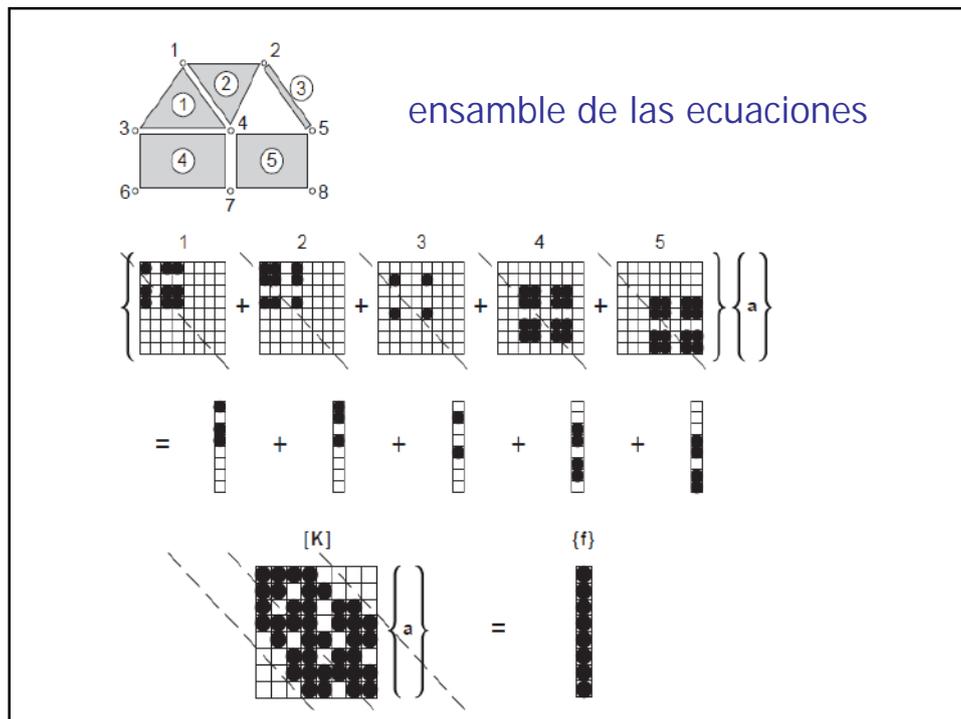
$$\nabla u = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{a}$$

$$\mathbf{H} = \sum_e \mathbf{H}^{(e)} = \sum_e \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} - \mathbf{N}^T \lambda \mathbf{N}) d\Omega$$

$$\mathbf{H}^{(e)} = \frac{k_{xx}}{4A} \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_1 b_2 & b_2^2 & b_2 b_3 \\ b_1 b_3 & b_2 b_3 & b_3^2 \end{pmatrix} + \frac{k_{yy}}{4A} \begin{pmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_1 c_2 & c_2^2 & c_2 c_3 \\ c_1 c_3 & c_2 c_3 & c_3^2 \end{pmatrix} +$$

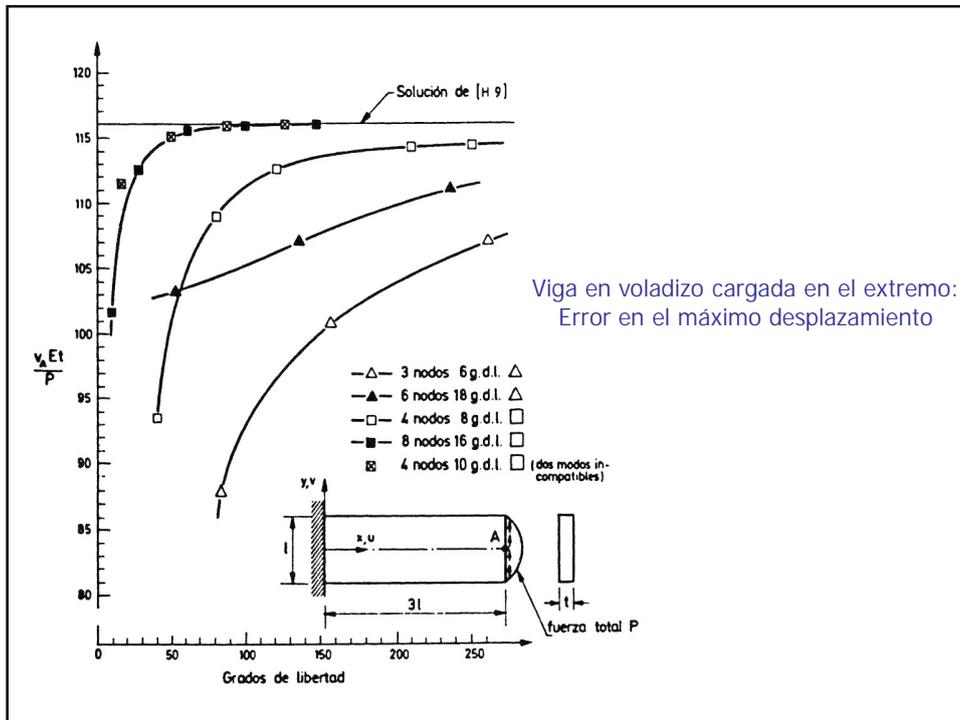
$$+ \frac{k_{xy}}{4A} \begin{pmatrix} 2b_1 c_1 & b_1 c_2 + b_2 c_1 & b_1 c_3 + b_3 c_1 \\ b_1 c_2 + b_2 c_1 & 2b_2 c_2 & b_2 c_3 + b_3 c_2 \\ b_1 c_3 + b_3 c_1 & b_2 c_3 + b_3 c_2 & 2b_3 c_3 \end{pmatrix} - \frac{\lambda A}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \sum_e \mathbf{b}^{(e)} = \sum_e \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T p d\Omega + \int_{S_{qe}} \mathbf{N}^T q dS \right) \Rightarrow \mathbf{b}^{(e)} = \frac{pA}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + b.t.$$



convergencia de la aproximación de EF

- Los métodos de elementos finitos son intrínsecamente aproximados
- En el contexto de estos métodos "convergencia" significa que la solución aproximada tiende a la exacta a medida que el tamaño de los elementos tiende a cero
- Para tener convergencia se requiere que las aproximaciones sean suficientemente derivables y que cumplan condiciones de consistencia, continuidad (hasta cierto orden de las derivadas) y estabilidad



consistencia

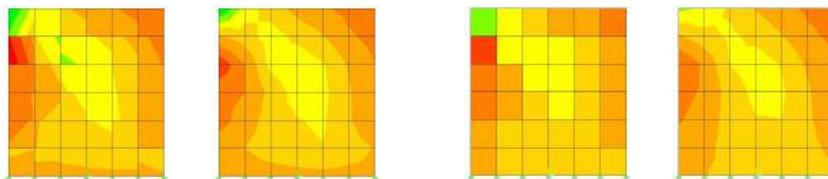
- En el límite, si las dimensiones de los elementos fueran infinitamente pequeñas, la aproximación de elementos finitos debería reproducir exactamente las condiciones supuestas para un elemento diferencial, que son la base para las ecuaciones que están siendo resueltas
- Si en el principio variacional (o formulación equivalente) se incluyen la(s) función(es) y sus derivadas hasta de orden m , las interpolaciones deben poder representar exactamente situaciones en las que la función o cualquiera de sus derivadas hasta de orden m es constante



continuidad

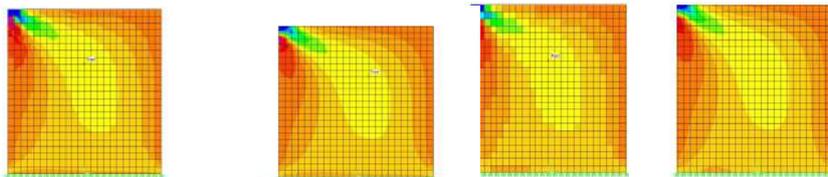
- Si la formulación incluye derivadas hasta de orden m , las aproximaciones para la función y sus derivadas hasta de orden $m-1$ deben ser continuas en los bordes entre elementos (esto permite descomponer cualquier integral en todo el dominio en la suma de integrales análogas sobre cada elemento)
- Las derivadas de orden m (o combinaciones lineales de tales derivadas) no son necesariamente continuas; las diferencias observadas en los bordes entre elementos son una medida del error

Esfuerzos Cortantes en un Muro Debidos a Fuerza Lateral



Elementos "Shell" SAP2000

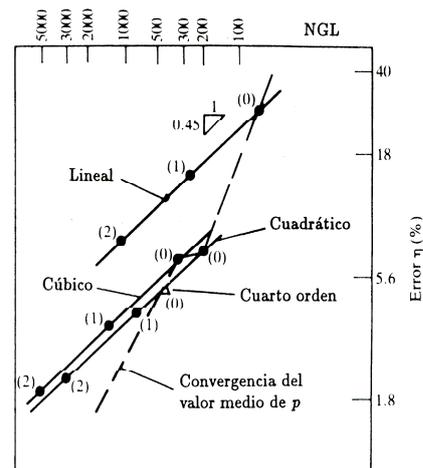
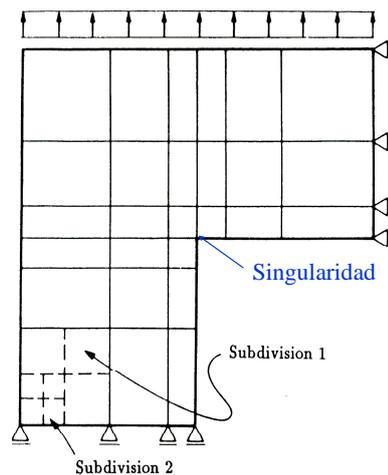
Elementos "Plane" SAP2000





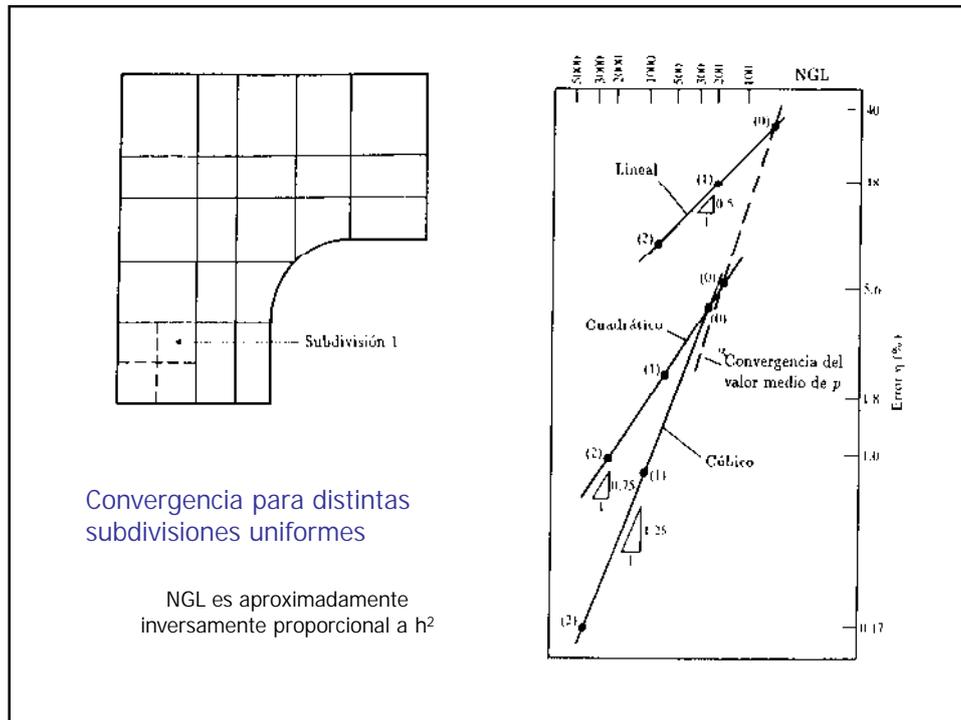
orden de convergencia

- La precisión depende de la regularidad de la función, de la calidad de la aproximación local y del tamaño, h , de los elementos
- Si la aproximación es un polinomio completo de grado p , el orden de convergencia depende de que tan bien ese polinomio puede aproximar localmente la expansión de u en series de Taylor y por tanto resulta $O(h^{p+1})$
- Las derivadas de orden k convergen con $O(h^{p+1-k})$
- Este orden de convergencia puede no lograrse si el problema presenta alguna singularidad



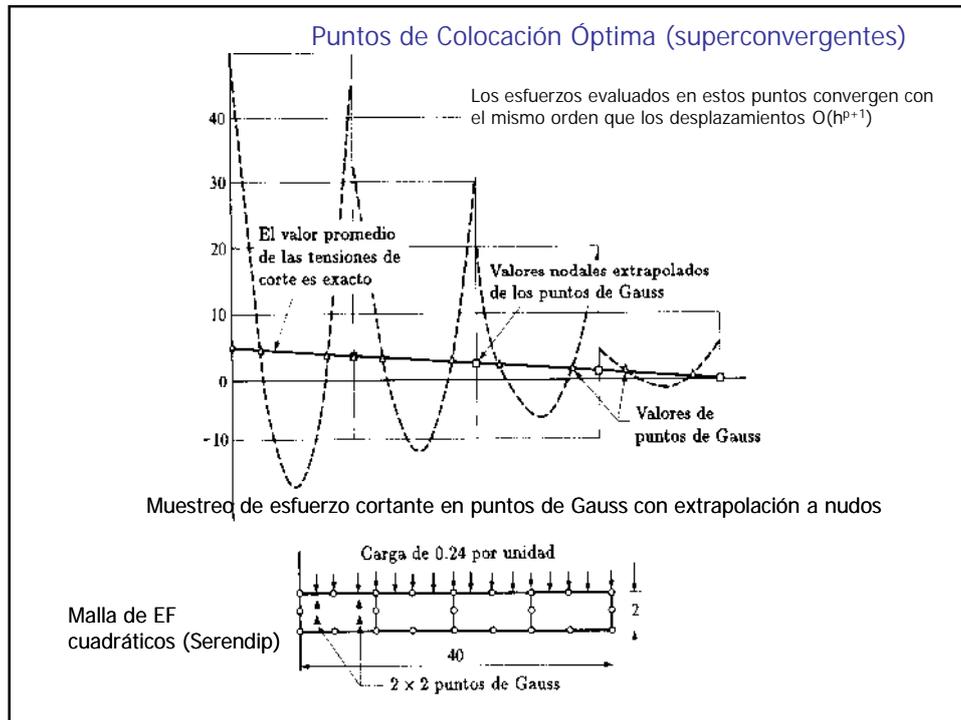
Efecto de la singularidad en la convergencia

NGL es aproximadamente inversamente proporcional a h^2



cómputo de los esfuerzos

- Los resultados de esfuerzos no son continuos en los bordes entre elementos (incluyendo los nudos)
- Antes de graficar, los programas comerciales promedian los resultados obtenidos en cada nudo, lo que proporciona mejores resultados que aquellos calculados para cualquiera de los elementos por separado
- En cada elemento, los resultados son mejores si se calculan en puntos óptimos y luego se extrapolan a los nudos
- Pueden obtenerse resultados mucho mejores suavizando los esfuerzos con una aproximación de mínimos cuadrados



Aproximación de mínimos cuadrados

Para cada componente de esfuerzo, σ_i , se plantea una aproximación suavizada, de la forma: $\sigma_i = \mathbf{N}^*$

σ^* agrupa los valores nodales suavizados y las \mathbf{N} son las mismas funciones de interpolación empleadas para los desplazamientos

Llamando $\hat{\sigma}_i(x_k, y_k)$ a los esfuerzos inicialmente obtenidos en n puntos de muestreo (óptimos), se minimiza:

$$\Pi = \sum_{k=1}^n \left(\hat{\sigma}_i(x_k, y_k) - \mathbf{N}(x_k, y_k) \right)^2$$

De donde:
$$\left(\sum_{k=1}^n \mathbf{N}_k^T \mathbf{N}_k \right)^* = \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{N}_k^T \hat{\sigma}_i(x_k, y_k) \right)$$



estimación del error

En lo que sigue, $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ se refieren a la solución por EF, mientras que $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ denotan los valores exactos

$\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ pueden aproximarse por $\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\varepsilon}^*$

Los estimadores de error más simples: $\mathbf{e}_\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*$
 $\mathbf{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*$

pueden en algunos casos ser inadecuados

Varias formas de la norma de energía son de uso frecuente:

$$\|\mathbf{e}\| = \left(\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*)^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}$$



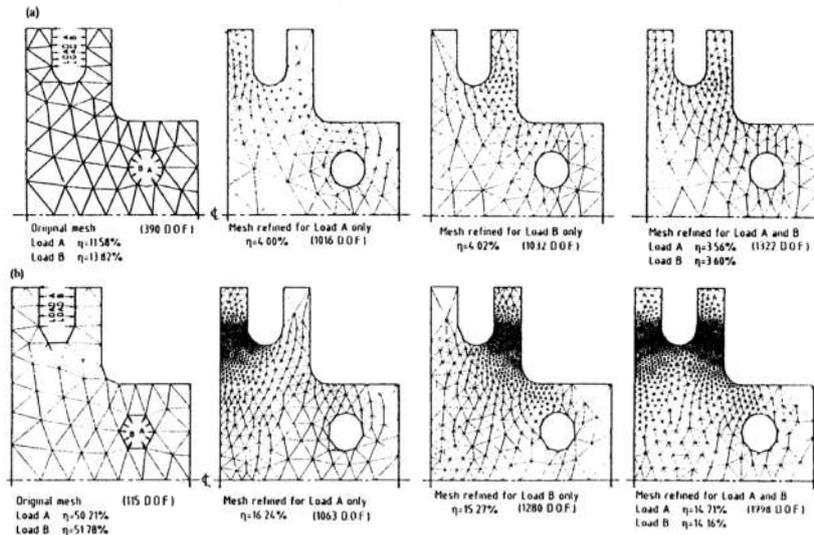
refinamiento adaptivo de mallas de EF

Una vez obtenida una solución con elementos finitos, pueden estimarse los errores en cada región del modelo y modificar la malla de elementos para lograr la precisión requerida

En el refinamiento- h se mantiene la misma clase de elementos, pero se cambia su tamaño, haciéndose más pequeños donde se requiera más precisión y en otros casos más grandes, para no hacer un esfuerzo de cómputo innecesario

El refinamiento puede hacerse subdividiendo los elementos o generando una malla totalmente nueva (lo que es más eficiente)

Refinamiento adaptivo de mallas de Elementos Finitos



a). Adaptive analysis for two loads: separate and combined meshes aiming for 5 percent accuracy with quadratic element

b). Adaptive analysis for two loads: separate and combined meshes aiming for 15 percent accuracy with linear element



refinamiento adaptivo de mallas de EF

El refinamiento automático de la malla de elementos finitos requiere:

- La estimación del error en cada región del modelo previamente usado
- La determinación del orden de convergencia para el tipo particular de elemento finito empleado
- La estimación del tamaño de elemento requerido (en cada región del modelo) para lograr los objetivos de precisión
- Un algoritmo de regeneración de la malla confiable y eficiente



error admisible

Error relativo en la norma de energía: $\eta = \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{u}\|} \times 100\%$

$$\|\mathbf{u}\| = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{D} \mathbf{u} \, d\Omega$$

Considerando que: $\|\mathbf{e}\|^2 = \sum_{i=1}^m \|\mathbf{e}_i\|^2$

Si el error relativo máximo admisible es $\bar{\eta}$, el error en cualquier elemento no debe exceder

$$\|\mathbf{e}_i\| \leq \bar{\eta} \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{m^{\frac{1}{2}}} \equiv \bar{e}$$

Definiendo $\xi_i = \|\mathbf{e}_i\| / \bar{e}$ la malla debe refinarse si $\xi_i > 1$ y puede hacerse más gruesa si $\xi_i < 1$



nuevo tamaño de los elementos

Considerando el orden de convergencia $\|e\|_k \propto h_k^p$

donde h_k es el tamaño del elemento y p es el grado del polinomio completo de aproximación, se debe tener para cada elemento:

$$\xi_k \leq 1 \Rightarrow \text{nuevo } h_k = h_k (\xi_k)^{-\frac{1}{p}}$$

Al refinar, la malla tiende a ser óptima y menos afectadas por las singularidades, excepto en los elementos adyacentes a las mismas, para los que:

$$\text{nuevo } h_k = h_k (\xi_k)^{-\frac{1}{\lambda}}$$

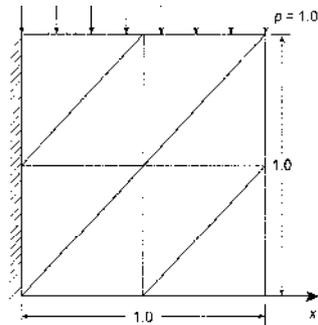
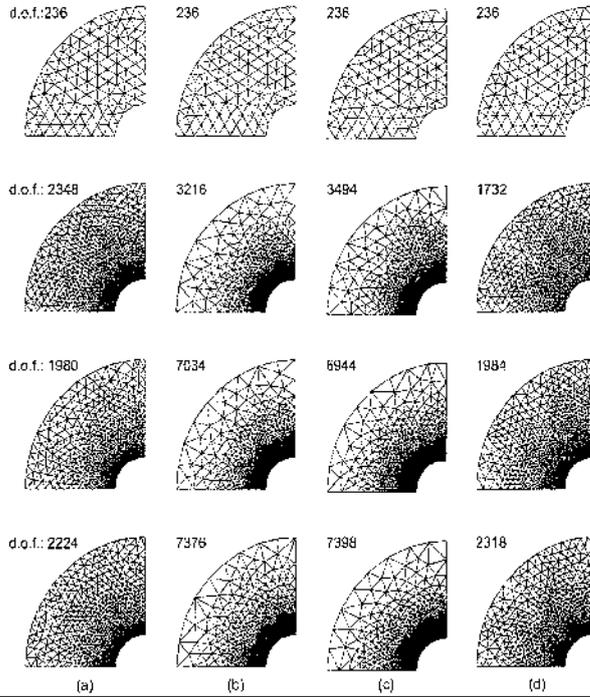
λ puede conservadoramente tomarse como 0.5

Secuencia de refinamiento adaptivo

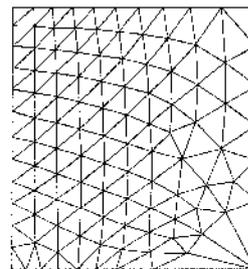
Basada en:

- a) Igual distribución del error total en energía
- b) Igual distribución de la densidad del error en energía
- c) Igual máximo error en los esfuerzos
- d) Igual máximo porcentaje de error en los esfuerzos

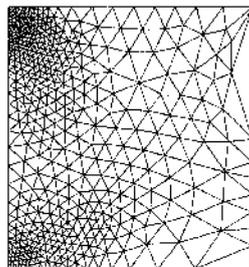
Menos que 5% en la norma de energía



Malla 1



Malla 2



Malla 3

Mallas de elementos finitos lineales (CST) para análisis de viga corta en voladizo

