

FUNDAMENTOS DEL ANALISIS DINAMICO DE ESTRUCTURAS

Ing. Rafael Salinas Basualdo
CISMID-FIC-UNI

1. INTRODUCCION

El enfoque de estos apuntes está orientado al caso de edificaciones ante acciones laterales, sean fuerzas externas o movimientos en la base. En primer lugar se revisarán los conceptos de rigidez lateral, primero para un pórtico simple y luego para un edificio de varios niveles, a partir de una simplificación del análisis que permite plantear modelos pseudo-tridimensionales para la representación de una edificación.

Los análisis dinámicos se dividen usualmente en tres grandes grupos:

- Análisis Modal Espectral, de uso ingenieril más común.
- Análisis Tiempo-Historia.
- Análisis en el dominio de las frecuencias.

Los análisis pueden realizarse considerando un comportamiento lineal fuerza-desplazamiento del material; eventualmente pueden considerarse comportamientos no lineales para los análisis tiempo-historia. Los programas de análisis estructurales más comunes no realizan análisis incluyendo efectos de segundo orden (denominado también no linealidad geométrica), es decir, la consideración de esfuerzos adicionales debidos a la modificación de los ejes causada por las deformaciones.

Las oscilaciones se producen en los elementos o sistemas estructurales debido a que tienen masas, elasticidad y una capacidad de amortiguamiento manifestado en diversas formas. Para realizar un análisis de la respuesta de estos sistemas se parte de algunas simplificaciones, con las que se aborda el problema de manera más sencilla y a menudo suficiente para fines prácticos de ingeniería. Sin embargo, deben comprenderse las hipótesis iniciales de cada tipo de análisis, pues en ellas están contenidas sus limitaciones y contribuyen a establecer sus campos de aplicación.

2. RIGIDEZ LATERAL DE PORTICOS

Durante el movimiento de una edificación por la acción sísmica, las solicitaciones sobre aquella son realmente de dirección diversa. Se ha llegado a considerar que el movimiento del suelo tiene seis componentes de movimiento independientes, tres traslacionales y tres rotacionales. Dentro de estas componentes, las traslacionales en las direcciones horizontales suelen ser tomadas en

cuenta, en forma independiente, para fines de tener condiciones de carga en los análisis, dado que por lo general son los más importantes.

En el caso de un pórtico plano, la sola consideración de un movimiento traslacional de la base implicaría la aparición de acciones de inercia traslacionales y rotacionales. Sin embargo, los giros ocasionados son relativamente pequeños, por lo que las acciones rotacionales también lo son y prácticamente no influyen en los efectos finales sobre la estructura ,tanto a nivel de desplazamientos como de fuerzas internas. Por esta razón, se considera una acción de inercia traslacional, por lo que la "fuerza" sísmica tiene, para fines de análisis, un sentido horizontal.

2.1 Rigidez Lateral de un Pórtico Simple

Sea el pórtico plano simple, de una crujía, mostrado en la Figura 1, sometido a la acción de una fuerza horizontal F , que representa la acción sísmica. La deformación axial de los elementos no se considera apreciable, de modo que los tres grados de libertad del sistema consisten en un desplazamiento lateral y dos giros en los nudos superiores.

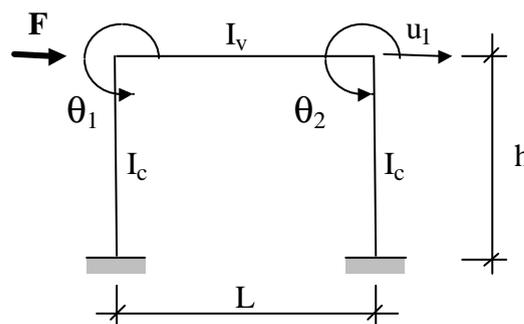


Figura 1

La ecuación básica del análisis matricial de estructuras es la siguiente:

$$\begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \frac{EI_c}{h^3} & 6 \frac{EI_c}{h^2} & 6 \frac{EI_c}{h^2} \\ 6 \frac{EI_c}{h^2} & 4 \frac{EI_c}{h} + 4 \frac{EI_v}{L} & 2 \frac{EI_v}{L} \\ 6 \frac{EI_c}{h^2} & 2 \frac{EI_v}{L} & 4 \frac{EI_c}{h} + 4 \frac{EI_v}{L} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Denotando $\gamma = \frac{EI_v / L}{EI_c / h}$

La matriz adopta la forma:

$$\begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI_c}{h} \begin{bmatrix} \frac{24}{h^2} & \frac{6}{h} & \frac{6}{h} \\ \frac{6}{h} & 4(1 + \gamma) & 2\gamma \\ \frac{6}{h} & 2\gamma & 4(1 + \gamma) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

La ecuación puede ser representada de esta forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\theta} \end{Bmatrix}$$

Donde:

- \mathbf{K}_{11} : submatriz con traslaciones originadas por los grados de libertad de traslación.
- \mathbf{K}_{22} : submatriz con rotaciones originadas por los grados de libertad de rotación.
- \mathbf{K}_{12} : submatriz con traslaciones originadas por los grados de libertad de rotación.
- \mathbf{K}_{21} : submatriz con rotaciones originadas por los grados de libertad de traslación.

Desarrollando las ecuaciones:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_{11} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{12} \mathbf{q}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{K}_{21} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{22} \mathbf{q}$$

De la segunda ecuación, se despeja \mathbf{q} :

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \mathbf{U}$$

Reemplazando la expresión de \mathbf{q} en la primera ecuación, se tiene:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_{11} \mathbf{U} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \mathbf{U}$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}) \mathbf{U} \quad \mathbf{K}_L = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}$$

Finalmente, se obtiene para el pórtico:

$$\mathbf{K}_L = 12 \frac{EIc}{h^3} \left(\frac{1 + 6\gamma}{2 + 3\gamma} \right)$$

La operación realizada se denomina **Condensación Estática**. Tiene por objeto reducir la matriz de rigidez con los términos asociados exclusivamente a las fuerzas actuantes sobre la estructura. De esta manera se concentra la labor en la obtención de ciertos desplazamientos para, a partir de éstos, calcular los desplazamientos restantes, sin los cuales no podrían calcularse las fuerzas internas completamente. En este caso, mediante una condensación estática la matriz de rigidez original fue reducida a una matriz de rigidez lateral (de un término) para obtener el desplazamiento lateral de piso causado por una fuerza horizontal.

2.2 Matriz de Rigidez Lateral de un Pórtico de Varios Pisos

En un pórtico de varios pisos, la matriz de rigidez total es una operación repetitiva de ensambles de matrices de los elementos, sean estos vigas, columnas, muros o arriostres, como se muestra en la Figura 2. Para obtener la matriz de rigidez lateral se harán las mismas suposiciones que en la situación anterior, por ejemplo, los desplazamientos laterales son iguales a nivel de cada piso (deformaciones axiales no considerados) y las acciones de inercia rotacionales no son tomadas en cuenta, solamente las acciones horizontales. Además, el modelo sería más apropiado para edificios de baja a mediana altura, en los cuales los efectos de las deformaciones axiales son poco considerables.

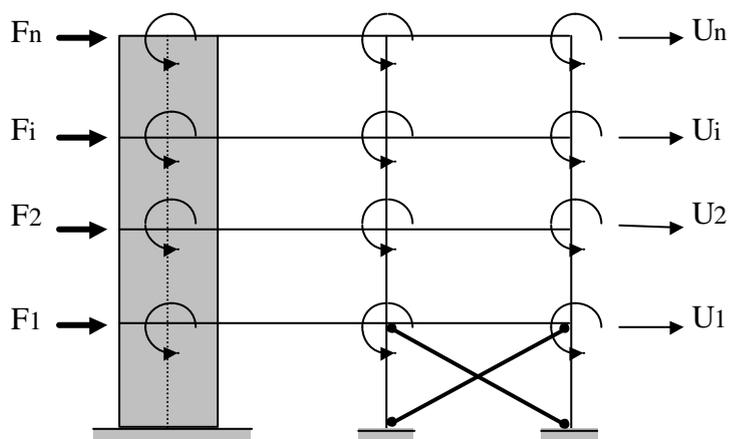


Figura 2

La matriz de rigidez total es representada por una serie de submatrices, que tienen el mismo significado que en el acápite 2.1.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{u} \\ \hat{i} & \hat{0} & \hat{y} \\ \hat{i} & \hat{0} & \hat{p} \end{matrix} = \begin{matrix} \hat{e} & \hat{e} \\ \hat{e} & \hat{e} \end{matrix} \begin{matrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{matrix} \begin{matrix} \hat{u} \\ \hat{u} \\ \hat{u} \end{matrix} \begin{matrix} \hat{i} & \hat{u} \\ \hat{i} & \hat{q} \\ \hat{i} & \hat{p} \end{matrix}$$

Desarrollando matricialmente las particiones (efectuando la condensación estática):

$$\mathbf{F} = (\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}) \mathbf{U}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_L \mathbf{U}$$

Luego, la rigidez lateral está dada por la expresión matricial:

$$\mathbf{K}_L = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}$$

2.3 Modelo de Cortante para Edificios

Un modelo de cortante se define como una estructura en la cual las rotaciones de una sección horizontal, al nivel de cada piso, no existen. Con esta suposición, la estructura tendrá muchas de las características de una viga en voladizo deformada únicamente por acción de fuerzas cortantes. Además se supone que las masas de la estructura están concentradas en los niveles de piso, las vigas de techo son infinitamente rígidas comparadas con las columnas, y la deformación de la estructura es independiente de las fuerzas axiales en las columnas. De esta manera un edificio de tres pisos, por ejemplo, tendrá tres grados de libertad, para una acción sísmica en una dirección horizontal determinada. No obstante, en la literatura sobre el tema se cuenta con métodos para evaluar las rigideces de entrepiso tomando en cuenta la flexibilidad de las vigas; las propuestas por Wilbur y Biggs (EEUU) y Muto (Japón) son ejemplos de ello.

En la Figura 3.a se presenta un esquema representativo de un modelo de una estructura de tres pisos. Se puede tratar el modelo como una columna simple, con masas concentradas al nivel de cada piso, entendiendo que las masas concentradas admiten solamente traslaciones horizontales. La rigidez de un entrepiso, entre dos masas consecutivas, representa la fuerza cortante requerida para producir un desplazamiento unitario relativo entre dos pisos adyacentes. En la Figura 3.b se muestran los diagramas de cuerpo libre con los que se obtienen las ecuaciones de movimiento para este modelo.

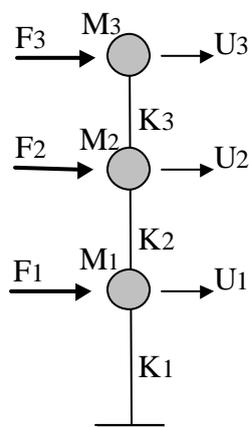


Figura 3.a

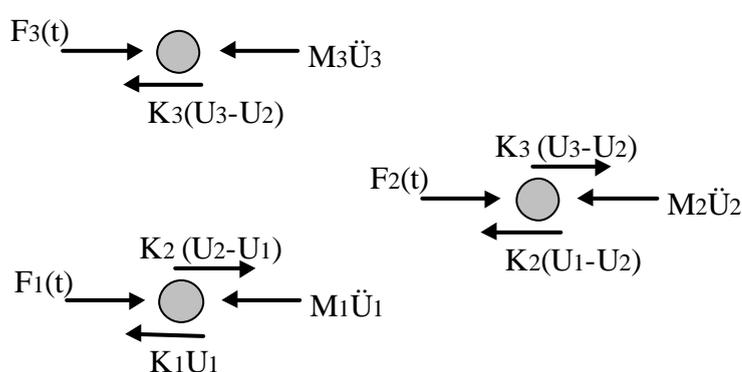


Figura 3.b

Aplicando el principio de D'Alembert, se obtienen las ecuaciones de movimiento,:

$$M_1 \ddot{U}_1 + (K_1 + K_2) U_1 - K_2 U_2 = F_1(t)$$

$$M_2 \ddot{U}_2 - K_2 U_1 + (K_2 + K_3) U_2 - K_3 U_3 = F_2(t)$$

$$M_3 \ddot{U}_3 - K_3 U_2 + K_3 U_3 = F_3(t)$$

En forma matricial:

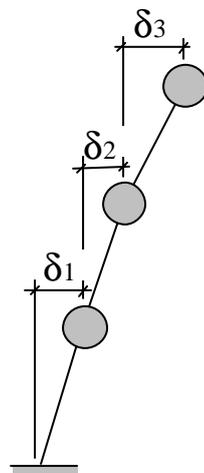
$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}(t)$$

Las matrices de masas y de rigidez son, respectivamente:

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} \text{æ} & M_1 & 0 & 0 & \ddot{u} \\ \text{ç} & 0 & M_2 & 0 & \dot{u} \\ \text{ç} & 0 & 0 & M_3 & u \\ \text{e} & & & & \theta \end{matrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{matrix} \text{æ} & K_1 + K_2 & -K_2 & 0 & \ddot{u} \\ \text{ç} & -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 & \dot{u} \\ \text{ç} & 0 & -K_3 & K_3 & u \\ \text{e} & & & & \theta \end{matrix}$$

Con este modelo, apropiado para análisis sísmicos en una dirección, es fácil observar algunos términos relativos a la respuesta del sistema estructural, tales como los desplazamientos de entrepiso y los cortantes de entrepiso, relacionados entre sí con la rigidez del entrepiso respectivo, como se muestra en la Figura 4.



U_i = desplazamiento absoluto

δ_i = desplazamiento relativo de entrepiso

$\delta_i = U_i - U_{i-1}$

V_i = cortante de entrepiso

Rigidez lateral del piso i-ésimo:

$K_i = V_i / \delta_i$

Cálculo del desplazamiento relativo del piso i-ésimo:

$\delta_i = V_i / K_i$

Figura 4

3 ANALISIS PSEUDO-TRIDIMENSIONAL

3.1 Hipótesis de Análisis

En los acápites anteriores fue desarrollada la formulación matricial para evaluar las rigideces laterales de un pórtico plano. Una estructura espacial puede ser modelada como un ensamble de pórticos planos, con propiedades de rigidez solamente en sus planos respectivos, admitiendo que las rigideces ortogonales a sus planos son bastante menores y pueden no ser consideradas. La hipótesis fundamental es la relativa a las losas de piso, las cuales son consideradas como cuerpos rígidos que conectan a los pórticos. Para fines del análisis sísmico, los grados de libertad para las losas de piso son tres: dos traslaciones horizontales y una rotación torsional en planta. De este modo, tampoco se toman en cuenta las deformaciones axiales en las columnas. En la Figura 5 se presenta un ejemplo de un edificio de dos niveles y los grados de libertad para cada uno de ellos.

Los análisis sísmicos pueden realizarse considerando las dos componentes horizontales del movimiento de la base y, si se trata de fuerzas estáticas equivalentes, dos fuerzas horizontales y un momento de torsión en planta por cada piso, en un punto que generalmente es el centro de masas del piso. La matriz de rigidez del sistema resulta de la suma de las rigideces laterales de cada pórtico, previamente transformadas para ser consistentes con los grados de libertad del entrepiso. El proceso en el que se realiza esta transformación se denomina **Condensación Cinemática** y se basa en relacionar, en un piso dado, los desplazamientos globales del entrepiso con el desplazamiento lateral de cada pórtico.

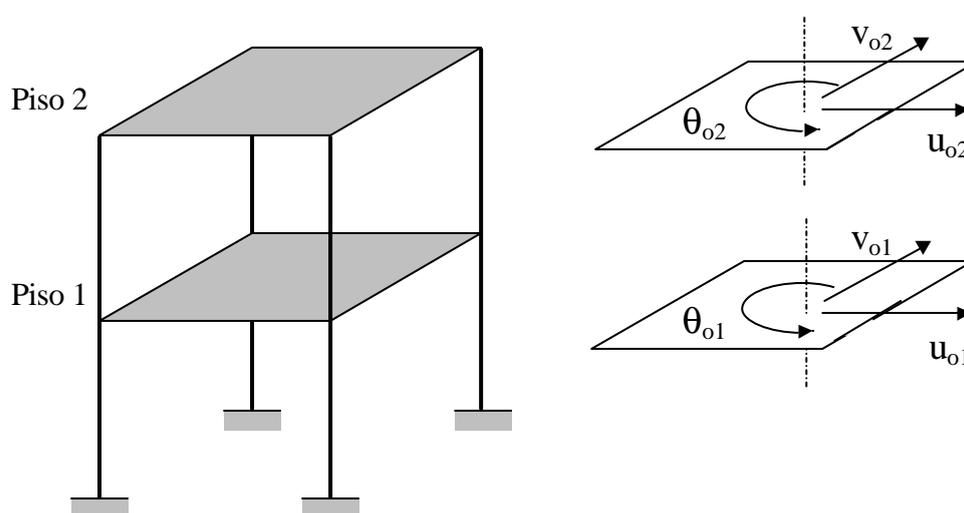
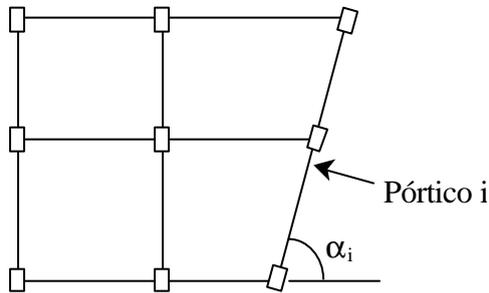


Figura 5

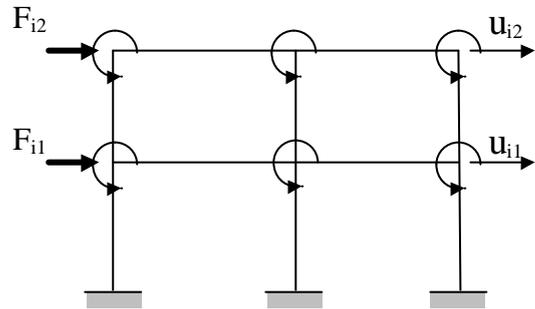
3.2 Procedimiento

- a) Determinación de las rigideces laterales para cada pórtico plano componente. Cada pórtico está en unas coordenadas locales, en base a los cuales están referidos los grados de libertad considerados para el pórtico (Figura 6).

$$K_L = K_{11i} - K_{12i} K_{22i}^{-1} K_{21i}$$



N: número de pisos



Pórtico i

Se define u_{ij} , donde:
 i: indicador del pórtico
 j: indicador del piso

Figura 6

b) Determinación de las rigideces de cada pórtico, transformadas a los grados de libertad globales (Figura 7).

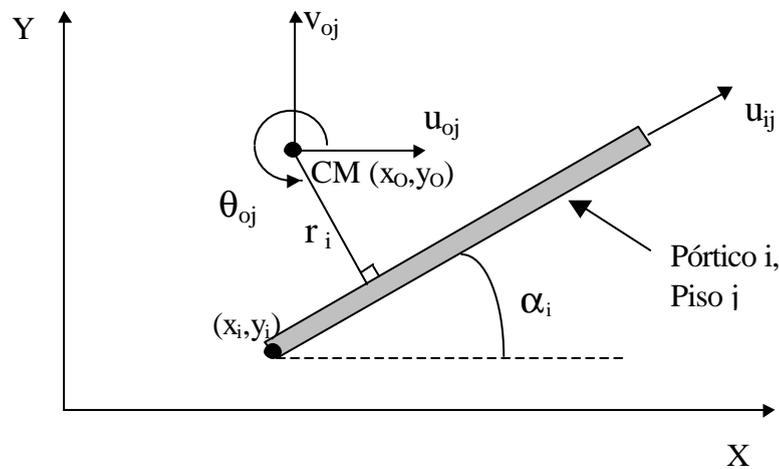


Figura 7

$$u_{ij} = u_{oj} \cos \alpha_i + v_{oj} \sin \alpha_i + \theta_{oj} r_i$$

$$r_i = (x_i - x_o) \sin \alpha_i - (y_i - y_o) \cos \alpha_i$$

$$u_{ij} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & r_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{oj} \\ \ddot{v}_{oj} \\ \ddot{\theta}_{oj} \end{Bmatrix}$$

Matricialmente:

$$u_{ij} = g_{ij} u_{oj}$$

Sea el vector U_i , que define los desplazamientos locales de todos los pórticos:

$$\begin{matrix}
 \ddot{u}_{i1} \\
 \ddot{u}_{i2} \\
 \ddot{u}_{i3} \\
 \ddots \\
 \ddot{u}_{iN}
 \end{matrix}
 =
 \begin{matrix}
 g_{i1} & & & & \\
 & g_{i2} & & & \\
 & & g_{i3} & & \\
 & & & \dots & \\
 & & & & g_{iN}
 \end{matrix}
 \begin{matrix}
 \ddot{u}_{o1} \\
 \ddot{u}_{o2} \\
 \ddot{u}_{o3} \\
 \ddots \\
 \ddot{u}_{oN}
 \end{matrix}$$

$$U_i = G_i U_o$$

G_i es la matriz de transformación y U_o la matriz de desplazamientos (del centro de masas da cada piso) de toda la estructura. La matriz de rigidez transformada es:

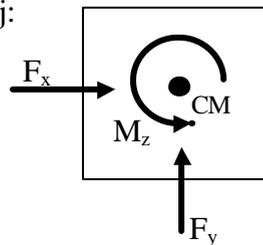
$$K_{Li} = G_i^T K_{Li} G_i$$

c) Determinación de la matriz de rigidez total.

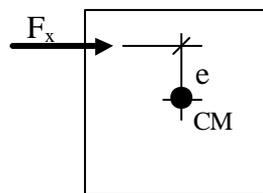
$$K_T = \sum_{i=1}^{i=N} K_{Li}$$

d) Determinación de los vectores de cargas.

Para el piso j:



$$F_j = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix}$$



$$F_j = \begin{bmatrix} F_x \\ 0 \\ -F_x e \end{bmatrix}$$

El vector de cargas para el sistema será:

$$F_T = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \dots \\ F_N \end{bmatrix}$$

e) Planteamiento de la ecuación de equilibrio.

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{K}_T \mathbf{U}_o$$

\mathbf{U}_o representa el vector de desplazamientos de los centros de masa de todos los niveles y es la incógnita a ser resuelta mediante técnicas de análisis matricial u otros procedimientos numéricos. \mathbf{F}_T representa las fuerzas en cada nivel.

f) Definición de los desplazamientos de cada pórtico.

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{G}_i \mathbf{U}_o, \text{ produciéndose en cada nivel: } \mathbf{u}_{ij} = \mathbf{g}_{ij} \mathbf{u}_{oj}$$

g) Cálculo de las fuerzas laterales en cada pórtico componente.

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{K}_{Li} \mathbf{U}_i$$

h) Cálculo de las fuerzas internas y desplazamientos en cada pórtico componente.

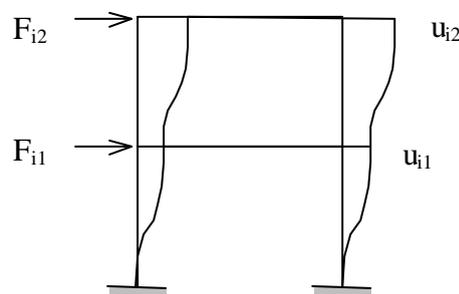
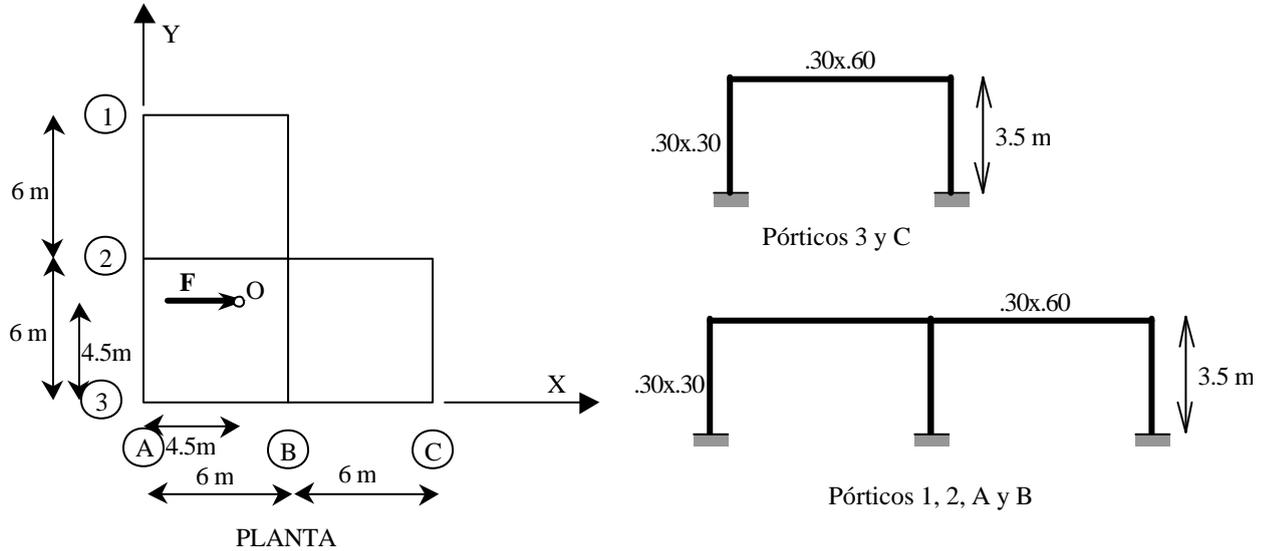


Figura 8

Como en el caso de modelos de cortante en edificios, este modelo no sería aplicable en el caso de edificaciones altas y esbeltas, donde sí pueden ser apreciables los efectos de las deformaciones axiales de las columnas y los momentos en dirección ortogonal al momento torsor. Con el propósito de ilustrar la forma de análisis de una estructura con un modelo pseudo-tridimensional, se presenta el ejemplo de una estructura aporricada de un piso, para una fuerza lateral especificada.

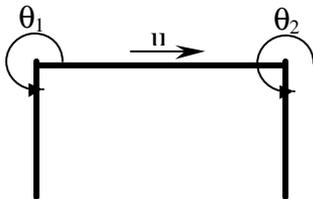
3.3 Ejemplo de Aplicación

Se desarrollará el análisis de una estructura aporcionada de concreto armado ($E=2 \times 10^6 \text{ t/m}^2$) de un piso, considerando que el diafragma de piso es suficientemente rígido para realizar el análisis con un modelo pseudo-tridimensional. La fuerza aplicada F es de 10 toneladas, como se indica en la figura.



a) Obtención de la Rigideces Laterales de cada pórtico

a.1) Pórtico Tipo I



$$\begin{aligned}
 I_v &= 5.4 \times 10^{-3} \text{ m}^4 \\
 I_c &= 6.75 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \\
 L &= 6.0 \text{ m} \\
 h &= 3.5 \text{ m} \\
 E_v &= E_c = 2 \times 10^{-6} \text{ t/m}^2
 \end{aligned}$$

$$g = \frac{5.4/6}{6.75/3.5} = 0.4667$$

Matriz de Rigidez:

$$\frac{EI_c}{h} \begin{pmatrix} \frac{24}{h} & \frac{6}{h} & \frac{6}{h} \\ \frac{6}{h} & 4(1+\gamma) & 2\gamma \\ \frac{6}{h} & 2\gamma & 4(1+\gamma) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{De: } \mathbf{q} = -\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \mathbf{U}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = -\frac{3}{(2+3\gamma)h} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \mathbf{u}$$

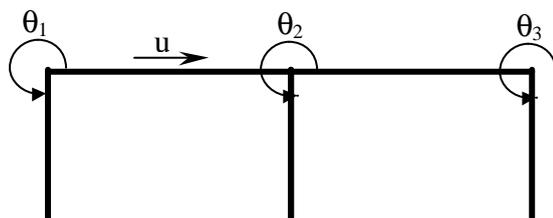
$$K_L = K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}$$

Operando:

$$K_{L_I} = \frac{12EI_c}{h^3} \left(\frac{1+6\gamma}{2+3\gamma} \right), \quad K_{L_I} = 6.848 \text{ t/cm.}$$

$$K_{L_I} u = H_1$$

a.2) Pórtico Tipo II



Matriz de Rigidez:

$$\frac{EI_c}{h} \begin{pmatrix} \frac{36}{h^2} & \frac{6}{h} & \frac{6}{h} & \frac{6}{h} \\ \frac{6}{h} & 4(1+\gamma) & 2\gamma & 0 \\ \frac{6}{h} & 2\gamma & 4(1+2\gamma) & 2 \\ \frac{6}{h} & 0 & 2\gamma & 4(1+\gamma) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{De: } \theta = -K_{22}^{-1} K_{21} U$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \frac{-\frac{3}{2h}}{(3\gamma^2+6\gamma+2)} \begin{Bmatrix} 2+3\gamma \\ 2 \\ 2+3\gamma \end{Bmatrix} u \quad ;$$

$$K_L = K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}$$

Operando:

$$K_{L_{II}} = \frac{18EI_c}{h^3} \left(\frac{1+9\gamma+6\gamma^2}{2+6\gamma+3\gamma^2} \right), \quad K_{L_{II}} = 10.325 \text{ t/cm}$$

$$K_{L_{ii}} u = H_2$$

b) Definición de la Matriz de Rigidez de la Estructura:

Considerando: $r_i = (x_i - x_o) \text{ sen } \alpha_i - (y_i - y_o) \text{ cos } \alpha_i$

Pórtico i	x_i (cm)	y_i (cm)	α_i (°)	$x_i - x_o$	$y_i - y_o$	r_i
1	0	0	0	-450	-450	450
2	0	600	0	-450	150	-150
3	0	1200	0	-450	750	-750
A	0	0	90	-450	-450	-450
B	600	0	90	150	-450	150
C	1200	0	90	750	-450	750

$$\sim x_o = 450 \text{ cm}, y_o = 450 \text{ cm}$$

<u>Pórtico i</u>	<u>K_{L_i}(t/cm)</u>	<u>$\text{Cos } \alpha_i$</u>	<u>$\text{Sen } \alpha_i$</u>	<u>r_i (cm)</u>
1	10.325	1	0	450
2	10.325	1	0	-150
3	6.848	1	0	-750
A	10.325	0	1	-450
B	10.325	0	1	150
C	6.848	0	1	750

Además, para cada pórtico:

$$u_i = u_o \text{ cos } \alpha_i + v_o \text{ sen } \alpha_i + r_i \theta_o$$

$$\text{o también : } u_i = G_i u_o \quad , \quad G_i = (\text{cos } \alpha_i \quad \text{sen } \alpha_i \quad r_i)$$

$$u_o = \begin{Bmatrix} u_o \\ v_o \\ \vartheta_o \end{Bmatrix}$$

Matriz de Rigidez Total:

$$K = \sum_i G_i^T K_{L_i} G_i$$

$$\text{Donde } G_i = (\text{cos } \alpha_i \quad \text{sen } \alpha_i \quad r_i)$$

Al realizar las operaciones, se obtiene:

$$K = \begin{pmatrix} 27.5 & 0 & -2038.5 \\ 0 & 27.5 & 2038.5 \\ -2038.5 & 2038.5 & 12\ 350\ 250 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad U_o = \begin{Bmatrix} u_o \\ v_o \\ \vartheta_o \end{Bmatrix}$$

c) Determinación de los desplazamientos de piso:

$$\text{De } \mathbf{K} \mathbf{U}_o = \mathbf{F}$$

$$U_o = \begin{Bmatrix} u_o \\ v_o \\ \vartheta_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.36822 \text{ cm} \\ -0.00456 \text{ cm} \\ 6.15310 \times 10^{-5} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

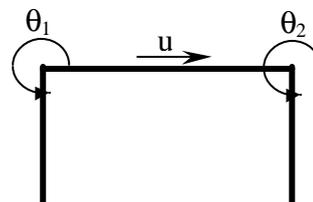
d) Desplazamientos de los Pórticos. Ejemplos: pórticos 3 y 1.

d.1) Pórtico 3

$$u_3 = G_3 U_o = (1 \ 0 \ -750) \begin{Bmatrix} u_o \\ v_o \\ \vartheta_o \end{Bmatrix}$$

$$u = u_3 = 0.32308 \text{ cm}$$

$$\text{Como : } \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} = - \frac{3}{(2 + 3\gamma)h} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} u$$



Re emplazando :

$$\begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} = -1.7254 \times 10^{-4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \text{ rad}$$

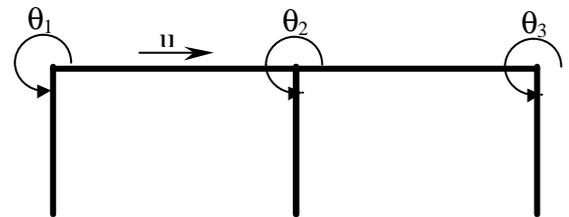
d.2) Pórtico 1

$$u_1 = G_1 U_o = (1 \quad 0 \quad 450) \begin{Bmatrix} u_o \\ v_o \\ \vartheta_o \end{Bmatrix}$$

$$u = u_1 = 0.39591 \text{ cm}$$

$$\text{como : } \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix} = -\frac{\frac{3}{2}}{(2 + 6\gamma + 3\gamma^2)} \begin{Bmatrix} 2 + 3\gamma \\ 2 \\ 2 + 3\gamma \end{Bmatrix} \frac{u}{h}$$

$$\text{operando : } \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.84773 \times 10^{-4} \\ -3.55967 \times 10^{-4} \\ -2.84773 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}, \text{ rad}$$



d) Momentos Flectores en el Pórtico 1

Columnas exteriores:

$$M_{\text{SUPERIOR}} = \frac{4EI}{h} \vartheta_1 + \frac{6EI}{h^2} u = 2.18 \text{ t-m}$$

$$M_{\text{INFERIOR}} = \frac{2EI}{h} \vartheta_1 + \frac{6EI}{h^2} u = 2.40 \text{ t-m}$$

Columna Interior:

$$M_{\text{SUPERIOR}} = \frac{4EI}{h} \vartheta_2 + \frac{6EI}{h^2} u = 2.56 \text{ t-m}$$

$$M_{\text{INFERIOR}} = \frac{2EI}{h} \vartheta_2 + \frac{6EI}{h^2} u = 2.59 \text{ t-m}$$

Viga Izquierda:

$$M_{\text{IZQUIERDO}} = \frac{4EI}{L} J_1 + \frac{2EI}{L} J_2 = -2.18 \text{ t-m}$$

$$M_{\text{DERECHO}} = \frac{2EI}{L} J_1 + \frac{4EI}{L} J_2 = -1.28 \text{ t-m}$$

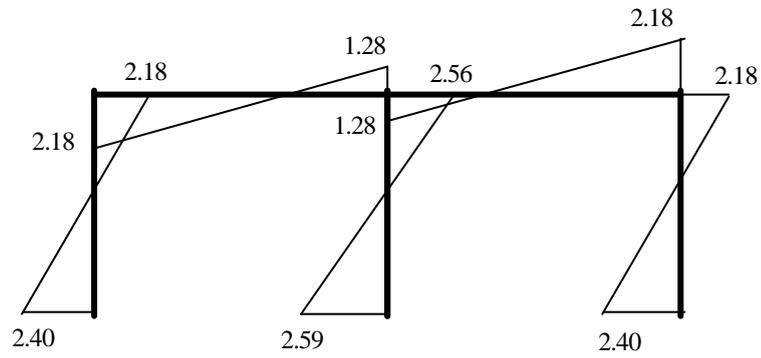


DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES
EN EL PORTICO 1 (t-m)

4 ANALISIS DINAMICO

4.1 Introducción

Las estructuras, cuando están sujetas a cargas o desplazamientos en la base, en realidad actúan dinámicamente, es decir, desarrollan acciones opuestas al movimiento impuesto por tales cargas o desplazamientos. Si éstos son aplicados muy lentamente, las fuerzas de inercia son bastante pequeñas (al ser las aceleraciones muy bajas) y por lo tanto se puede justificar un análisis de tipo estático. Por otro lado, las estructuras son un continuo y tienen un infinito número de grados de libertad. Se han tratado anteriormente las formas de concentrar la evaluación en puntos (nudos o pisos) que son suficientes para determinar el comportamiento de la estructura y calcular sus fuerzas internas. La masa del sistema estructural es concentrada en los nudos o a nivel de los centros de masa de cada piso, según el modelo utilizado. Asimismo, si los análisis se realizan considerando que el material estructural tendrá un comportamiento elástico y lineales, las propiedades de rigidez de la estructura pueden aproximarse con un alto grado de confiabilidad, con ayuda de información experimental. Lo mismo puede asumirse para las propiedades de amortiguamiento. Las cargas dinámicas y las condiciones en la base de la cimentación suelen ser difíciles de estimar, sobre todo en el caso de cargas sísmicas.

4.2 Ecuaciones de Movimiento

La ecuación fundamental de movimiento de un sistema de múltiples grados de libertad, de masas concentradas, puede ser expresada como una función del tiempo de la forma:

$$\mathbf{F}(t)_I + \mathbf{F}(t)_D + \mathbf{F}(t)_S = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

donde los vectores de fuerza, variables en el tiempo t , son:

$\mathbf{F}(t)_I$: vector de acciones de inercia en las masas concentradas

$\mathbf{F}(t)_D$: vector de fuerzas por amortiguamiento, supuesto como de tipo viscoso

$\mathbf{F}(t)_S$: vector de fuerzas por deformación de la estructura

$\mathbf{F}(t)$: vector de cargas aplicadas externamente

La ecuación (1) es válida tanto para sistemas lineales como no lineales, si el equilibrio dinámico se plantea con respecto a la geometría deformada de la estructura.

En caso de un análisis lineal la ecuación se puede escribir, en términos de los desplazamientos (nodales o de piso), de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t)_a + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t)_a + \mathbf{K}\mathbf{u}(t)_a = \mathbf{F}(t) \quad (2)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masas (concentradas), \mathbf{C} es la matriz de amortiguamiento viscoso (definido para considerar la energía de disipación en la estructura real) y \mathbf{K} es la matriz de rigidez para el sistema estructural. Los vectores dependientes del tiempo $\mathbf{u}(t)_a$, $\dot{\mathbf{u}}(t)_a$ y $\ddot{\mathbf{u}}(t)_a$ son los desplazamientos, velocidades y aceleraciones absolutas (nodales o de piso), respectivamente.

En el caso de una acción sísmica, las cargas externas $\mathbf{F}(t)$ se consideran iguales a cero. Los movimientos sísmicos básicos son las tres componentes de desplazamiento de la base $\mathbf{u}(t)_{ig}$, que son conocidos en los puntos que se encuentran al nivel de la cimentación. Es usual puede plantear la ecuación (1) en términos relativos a los desplazamientos de la base, es decir, los desplazamientos relativos $\mathbf{u}(t)$, las velocidades relativas $\dot{\mathbf{u}}(t)$ y las aceleraciones relativas $\ddot{\mathbf{u}}(t)$.

En consecuencia, los desplazamientos, velocidades y aceleraciones absolutas pueden eliminarse de la ecuación (2) mediante las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{u}(t)_a = \mathbf{u}(t) + \mathbf{1}_x u(t)_{xg} + \mathbf{1}_y u(t)_{yg} + \mathbf{1}_z u(t)_{zg} \quad (3a)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t)_a = \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{1}_x \dot{u}(t)_{xg} + \mathbf{1}_y \dot{u}(t)_{yg} + \mathbf{1}_z \dot{u}(t)_{zg} \quad (3b)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t)_a = \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{1}_x \ddot{u}(t)_{xg} + \mathbf{1}_y \ddot{u}(t)_{yg} + \mathbf{1}_z \ddot{u}(t)_{zg} \quad (3c)$$

donde $\mathbf{1}_i$ es un vector con unos (1) en las posiciones correspondientes a los grados de libertad en la dirección “i” y ceros (0) en las otras posiciones. Sustituyendo las ecuaciones (3) en la ecuación (2), las ecuaciones de movimiento son reescritas como sigue:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{M}_x \ddot{u}(t)_{xg} - \mathbf{M}_y \ddot{u}(t)_{yg} - \mathbf{M}_z \ddot{u}(t)_{zg} \quad (4)$$

donde: $\mathbf{M}_i = \mathbf{M}\mathbf{1}_i$.

La forma simplificada de la ecuación (4) es posible dado que los desplazamientos y las velocidades de cuerpo rígido asociados con los movimientos de la base no causan fuerzas restauradoras elásticas o de disipación adicionales.

Desde el punto de vista ingenieril, los desplazamientos más importantes son los desplazamientos relativos, proporcionados por los programas de cómputo en sus archivos de resultados,. Debe entenderse que la sollicitación sísmica en la estructura se debe a los desplazamientos en su base y no a cargas puntuales aplicadas en la estructura. Sin embargo, se considera suficiente un análisis con cargas estáticas equivalentes en casos relativamente simples, de edificios con pocos pisos y ciertas condiciones de regularidad en la distribución de sus masas y de sus elementos que le brindan rigidez; estas condiciones son especificadas en los códigos de diseño sismorresistente.

4.3 Ecuaciones de Movimiento

Existen diversos métodos propuestos para ser empleados para la solución de la ecuación (1). Cada método tiene ventajas y desventajas, de acuerdo al tipo de estructura y la carga.

Los métodos numéricos de solución pueden clasificarse del siguiente modo:

4.3.1 Método de Solución paso a paso

El método de solución más completo para el análisis dinámico en un método incremental en el cual las ecuaciones van siendo resueltas en los tiempos Δt , $2\Delta t$, $3\Delta t$, etc. Hay un gran número de métodos de solución incremental. En general, estos métodos involucran una solución de todo el conjunto de ecuaciones (1) en cada incremento de tiempo. En el caso de un análisis no lineal, puede ser necesario reformular la matriz de rigidez de todo el sistema estructural para cada paso. Además, se efectuarán iteraciones dentro de cada incremento de tiempo, para satisfacer las condiciones de equilibrio. Como los requerimientos de cómputo son significativos, estos métodos pueden emplearse para resolver sistemas estructurales con pocos cientos de grados de libertad.

Adicionalmente, en estos métodos de solución, el amortiguamiento numérico o artificial debe ser incluido, con el propósito de obtener soluciones estables. En ciertos casos de estructuras con comportamiento no lineal sujetas a movimientos en la base, es indispensable el empleo de los métodos de solución incremental.

En sistemas estructurales muy grandes, se ha encontrado que la combinación de los métodos incrementales y de superposición modal ha sido eficiente para sistemas con un pequeño número de elementos no lineales.

4.3.2 Método de Superposición Modal

Es el método más común y efectivo de los procedimientos para el análisis sísmico de sistemas estructurales lineales. Este método, luego de evaluar un conjunto de vectores ortogonales, reduce el gran conjunto de ecuaciones generales de movimiento a un pequeño número de ecuaciones diferenciales desacopladas de segundo orden. La solución numérica de estas ecuaciones implica una gran reducción del tiempo de cómputo.

Con este método se obtiene la respuesta completa, en su variación en el tiempo, de los desplazamientos de los nudos y fuerzas en los elementos debidos a un movimiento determinado en la base.

Se ha demostrado que los movimientos sísmicos excitan a la estructura principalmente en sus frecuencias más bajas. Por lo general, las aceleraciones del terreno son registradas, en los acelerogramas digitales, con intervalos a razón de 100 o 200 puntos por segundo. De manera que la información de las acciones sísmicas no contiene frecuencias por encima de los 50 ciclos por segundo. En consecuencia, si no se consideran las frecuencias altas y las correspondientes formas de modo en la respuesta de un sistema, no se introducirán errores.

El método tiene dos desventajas. En primer lugar, se produce una gran cantidad de información, la cual requiere un enorme esfuerzo computacional, donde se consideren todas las posibilidades de la verificación del diseño como una función de tiempo. En segundo lugar, el análisis debe repetirse para diferentes registros sísmicos - frecuentemente tres registros como mínimo - con el propósito de asegurar que todos los modos significativos sean excitados.

4.3.3 Análisis Modal Espectral

El análisis modal espectral (o método de la respuesta espectral) es un método ventajoso para estimar los desplazamientos y fuerzas en los elementos de un sistema estructural. El método implica el cálculo solamente de los valores máximos de los desplazamientos - y las aceleraciones - en cada modo usando un espectro de diseño, el mismo que representa el promedio o la envolvente de espectros de respuesta para diversos sismos, con algunas consideraciones adicionales expuestas en los códigos de diseño. Luego se combinan estos valores máximos, por ejemplo mediante un promedio ponderado entre la media y la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de tales valores máximos; otro método es el de la combinación cuadrática completa (método CQC), que considera además una correlación entre los valores modales máximos. De este modo, se obtienen los valores más probables de desplazamientos y fuerzas.

4.3.4 Análisis en el Dominio de Frecuencias

Este procedimiento es empleado para resolver las ecuaciones de movimiento en el dominio de frecuencias. Para ello, las fuerzas externas $\mathbf{F}(t)$ son expresadas en una expansión de términos de series de Fourier o integrales de Fourier. La solución está dada en números complejos, cubriendo el espacio de $-\infty$ a ∞ . Este procedimiento es muy efectivo para cargas periódicas como en vibración de maquinarias, problemas de acústica, efectos de las olas de mar y de viento. Sin embargo, el uso de este método para resolver problemas de ingeniería sísmica tiene las siguientes desventajas:

- Por lo general, el entendimiento de las matemáticas involucradas en el método puede ser difícil de entender para los ingenieros. La verificación de las soluciones también podría ser difícil.
- Las acciones sísmicas no son periódicas. Sin embargo, los registros sísmicos del terreno - el movimiento de la base - pueden ser transformados al dominio de frecuencias con algoritmos especiales y, luego de realizar los análisis y las operaciones involucradas, volver a ser transformados para obtener la respuesta del sistema en el tiempo.
- Para acciones sísmicas, el método no es numéricamente eficiente.
- El método es aplicable a sistemas estructurales lineales.

5 CARACTERISTICAS DE LOS PROGRAMAS DE ANALISIS

Los programas de análisis estructural son desarrollados principalmente para estructuras de concreto armado, sean aporticadas, con muros o mixtos; también es posible analizar estructuras de acero o una mixtura de ambos materiales. Para los análisis no lineales, existen programas que consideran la no linealidad del material y otros que incluyen también la no linealidad geométrica (para considerar el efecto de segundo orden de las cargas); se tienen diferentes opciones de modelos histeréticos, de acuerdo a los distintos materiales y las distintas teorías de comportamiento no lineal. En la Figura 9 se presenta un esquema del desarrollo de las operaciones de un programa de análisis estructural.

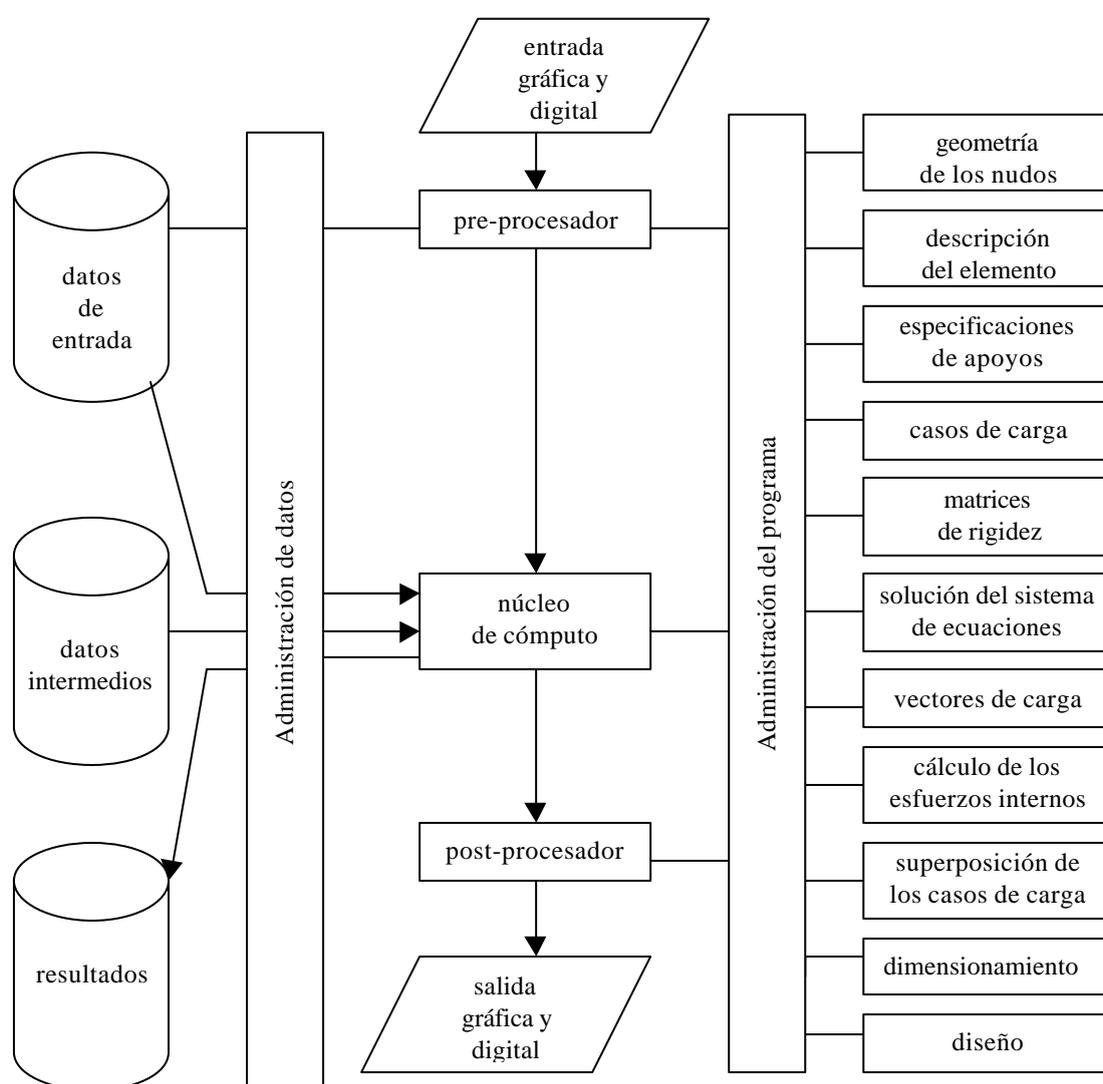


Figura 9

Algunas de las características más comunes en todo programa de análisis son las siguientes:

- Variedad de elementos
- Opciones de modelamiento típico
- Reducción de datos y rapidez de cómputo
- Variedad de tipos de estructuras
- Suposición de diafragma rígido
- Variedad de cargas estáticas
- Variedad de análisis dinámicos
- Modelos de curvas de histéresis
- Inclusión de aisladores sísmicos y disipadores de energía

- *Variedad de elementos*

Los elementos mecánicos que componen el sistema pueden ser vigas o columnas, cables o puntales a carga axial, muros verticales de corte, resortes para modelar soportes elásticos. Pueden estar orientados arbitrariamente o según ejes globales. Cada elemento tiene su correspondiente equivalencia en rigidez, tanto en magnitud como en ubicación para el ensamblaje de la matriz de rigidez total (de todo el sistema). Desde los programas, la eliminación o adición de elementos mecánicos al modelo es una operación sencilla y, en las versiones modernas, de fácil visualización.

- *Opciones de modelamiento típico*

Las últimas versiones de los programas cuentan con opciones para la elección de modelos típicos, que contienen en sí mismos las suposiciones de análisis (grados de libertad, reacciones posibles, fuerzas internas).

- *Reducción de datos y rapidez de cómputo*

Los creadores de los programas fueron asimilando progresivamente los nuevos métodos numéricos para optimizar las operaciones de cómputo, y consiguieron una menor demanda de memoria y una reducción del tiempo de cómputo. Naturalmente, a ello ha contribuido el avance en la tecnología de las computadoras. Como un ejemplo, las matrices de rigidez suelen ser reducidas a matrices que contienen elementos no nulos, entre otros métodos de optimización numérica.

- *Variedad de tipos de estructuras*

Los programas antiguos tenían el inconveniente de modelar solamente estructuras con direcciones ortogonales. Ahora, las versiones modernas cuentan con la facilidad de modelamiento de estructuras con pórticos en direcciones arbitrarias, con más de un tipo de material. Internamente, el programa asigna los números para los nudos y los elementos, de

modo que la presentación de los resultados sea concordante con el orden de la geometría del modelo.

- *Suposición de diafragma rígido*

De acuerdo al modelo estructural, puede suponerse el piso de cada nivel como un diafragma rígido o con flexibilidad. Si el diafragma es rígido, se indican los nudos dependientes del movimiento general del piso rígido, el cual se movería siguiendo dos desplazamientos mutuamente ortogonales y una rotación; existen programas que no necesitan esta especificación, pues asignan a los nudos de un mismo nivel la dependencia con el movimiento del piso.

- *Variedad de cargas estáticas*

Se conoce que las cargas estáticas a considerar van desde las cargas de gravedad (peso propio y carga permanente externa) a las cargas equivalentes al sismo o al viento. Pueden ser cargas externas - fuerzas o momentos - puntuales o distribuidas, lineal o trapezoidalmente. La presentación de resultados puede darse a nivel de efectos internos en los extremos de nudos o puede incluir resultados en secciones intermedias.

- *Variedad de análisis dinámicos*

A nivel de análisis dinámicos, las opciones proporcionadas por los programas incluyen:

- Análisis de valores y vectores propios.
- Análisis espectral modal.
- Análisis tiempo-historia
- Análisis dinámico con cargas armónicas
- Análisis estático lateral-incremental (*push over analysis*)

Las últimas versiones de programas comerciales incorporan la alternativa de un análisis estático con fuerzas laterales incrementales (*push over analysis*). Es un proceso paso a paso, en el que las fuerzas van siendo aumentadas gradualmente desde cero hasta la carga última. También es posible hacer incrementos y disminuciones de las cargas, de modo que puedan analizarse casos de carga cíclica o inversión de cargas. Los análisis pueden ser tales que los parámetros a controlar sean las fuerzas o los desplazamientos. Este método ha llegado a ser recomendado para estudiar el mecanismo de colapso de edificaciones.

- *Modelos de curvas de histéresis*

Las curvas de histéresis incluidas en los programas fueron tomados a partir de curvas de comportamiento (curvas esqueleto, en inglés "skeleton curves"), definidos mediante datos de

entrada, del tipo bi-lineal, tri-lineal, compresión pura o tracción pura. Existen programas que insertan curvas tipo "pinching", o que consideran la degradación de la rigidez y la disminución de la resistencia.

- *Inclusión de aisladores sísmicos y disipadores de energía*

En los últimos años, ha aumentado la factibilidad de construir aisladores sísmicos en la base de la edificación o disipadores de energía entre los elementos estructurales, por ello existen programas que ya lo incluyen como una opción adicional de análisis.

6 REFERENCIAS

- Clough, R.W. y Penzien, J. (1975). Dynamics of Structures. Mc.Graw - Hill. New York, EEUU.
- Paz, Mario (1985). Structural Dynamics: Theory and Computation. Van Nostrand Reinhold Co. New York, EEUU.
- Piqué, J. y Scaletti, H. (1991). Análisis Sísmico de Edificios. Colección del Ingeniero Civil, CDL-CIP. Lima, Perú.
- Sarria, A. (1990). Ingeniería Sísmica. Ediciones Uniandes. Bogotá, Colombia.
- Scaletti, H. (1990). Notas de clase del curso Análisis Estructural II, Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Nacional de Ingeniería.
- Wilson, E.L. (1997). Three Dimensional Dynamic Analysis of Structures. Computers and Structures, Inc. California, EEUU.